CP n° 8 - Equations différentielles linéaires

1 Equations différentielles linéaires du premier ordre

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Définition et structure linéaire

Définition. *Soit $a : I \to \mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues. On considère l'EDL d'ordre 1 (E_1) et l'équation homogène associée (H_1) :*

$$y' + a(t)y = f(t) \qquad (E_1)$$

$$y' + a(t)y = 0 \qquad (H_1)$$

*Une fonction $y : I \to \mathbb{K}$ est dite **solution** de (E_1) si elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et vérifie :*

$$\forall t \in I\,,\ y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

Remarque ((R1) Principe de superposition/structure linéaire)**.** *Si une fonction y_1 est une solution de l'équation $y' + a(t)y = f_1(t)$ et y_2 est solution de $y' + a(t)y = f_2(t)$, où f_1 et f_2 sont deux fonctions continues, alors pour tout couple $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$ est solution de l'équation $y' + a(t)y = \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)$.*

Conséquence : Si y_P est une solution particulière de (E_1), alors pour toute autre solution y de (E_1), la fonction $y_H = y - y_P$ est solution de l'équation différentielle avec second membre $f(t) - f(t) = 0$, c'est-à-dire solution de (H_1). On a donc

$$\boldsymbol{y = y_H + y_P}$$

1.2 Résolution de l'équation homogène (H_1)

Théorème (T1)**.** *Notons $A : I \to \mathbb{K}$ une primitive de a. Les solutions de (H_1) sont les fonctions de la forme :*

$$\boldsymbol{y_H : t \mapsto C\, e^{-A(t)}} \quad , \quad \text{où } C \text{ est une constante de } \mathbb{K}$$

1.3 Recherche d'une solution particulière

1.4 Quelques recettes lorsque a est constant

On se place dans le cas $y' + ay = f(t)$, où $a \in \mathbb{K}^*$ est constant.

- **Recette 1 :** si le 2nd membre f = constante, chercher y_P constante.
- **Recette 2 :** si f est polynomiale, chercher y_P polynomiale, de même degré.
- **Recette 3 :** si $f(t) = e^{\alpha t}$ où $\alpha \in \mathbb{K}$, alors :
  - si $\alpha \neq -a$ chercher y_P de la forme $\lambda e^{\alpha t}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$;
  - si $\alpha = -a$ chercher y_P de la forme $\lambda t e^{\alpha t}$;
- **Recette 4 :** si a est réel et $f(t) = \sin(\omega t)$ ou $\cos(\omega t)$, chercher y_P de la forme $\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

1.5 Méthode de la variation de la constante

Théorème (T2). *Si A est une primitive de a sur I, alors une solution particulière de (E_1) est la fonction :*

$$\boldsymbol{y_P : t \mapsto C(t)\, e^{-A(t)}} \qquad \textit{où la } \boldsymbol{\textit{fonction } C \textit{ est une primitive de } f.e^{A}}.$$

Remarques.

- *Ce théorème peut se retrouver facilement en se souvenant qu'il faut chercher une solution particulière du type Ce^{-A} où C n'est pas une constante mais une* ***fonction****. En injectant cette forme dans $y' + ay = f$, on trouve qu'une telle fonction est solution ssi $C' = f.e^{A}$.*
- *On s'est encore ramené à un calcul de primitive.*

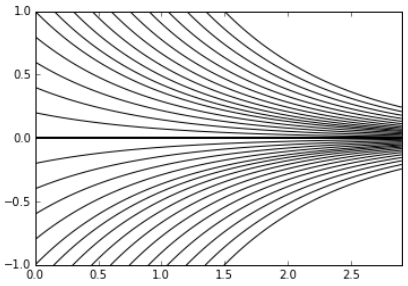
1.6 Résolution de l'équation complète

Théorème ((T3) Solution générale de (E_1)). *Les fonctions $I \to \mathbb{K}$ solutions de l'équation (E_1) sont les fonctions de la forme*

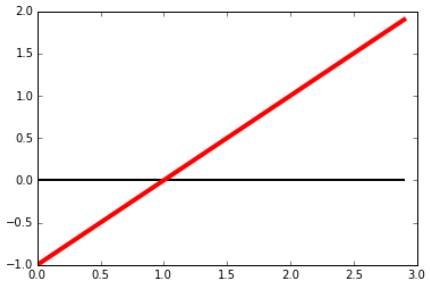
$$\boldsymbol{y = y_H + y_P}$$

où y_H est une solution de l'équation homogène (H_1) et y_P est une solution particulière de (E_1).

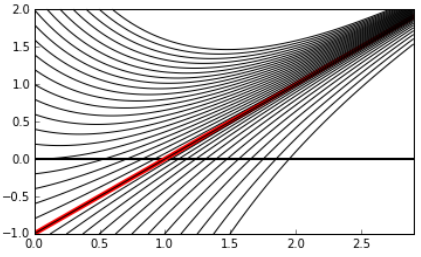
Exemple : pour l'équation $y'(t) + y(t) = t$.



$y_H : t \mapsto Ce^{-t}$



$y_P : t \mapsto t - 1$

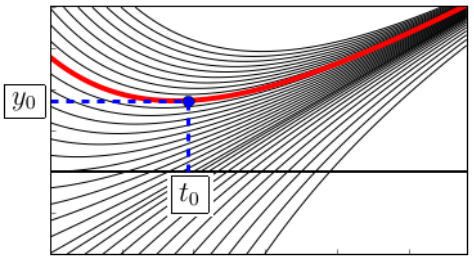


$y : t \mapsto Ce^{-t} + (t-1)$

Remarque. *Si l'on n'impose aucune condition supplémentaire à y, il existe donc une infinité de solutions, paramétrées par la constante C.*

Théorème ((T4) Solution du problème de Cauchy). *Si l'on fixe $t_0 \in I$ et une valeur $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique fonction y de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui satisfait le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} y' + a(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$



Démonstrations des résultats de cette partie

Démonstration de (R1) : fixons $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et observons que $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est dérivable et

$$(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)' + a(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1(y_1' + a y_1) + \lambda_2(y_2' + a y_2) = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2.$$

Démonstration de (T1) : procédons par analyse-synthèse.

- **Analyse :** soit y une solution de (H_1). On a donc $y' + ay = 0$ sur I.

  Idée : on veut montrer $y = Cste.e^{-A}$. Or, cela équivaut à $ye^A = Cste$. Il suffit donc de montrer que la fonction ye^A est constante, typiquement en montrant qu'elle est de dérivée nulle.

  On calcule :

$$\begin{aligned}(ye^A)' &= y'e^A + y.ae^A \\ &= e^A \underbrace{\big(y' + ay\big)}_{=0} \\ &= 0\end{aligned}$$

  et donc ye^A est constante. Ainsi il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall t \in I,\ y(t)e^{A(t)} = C \qquad \text{et donc} \qquad \boxed{y(t) = Ce^{-A(t)}}.$$

- **Synthèse :** réciproquement, considérons une fonction du type $y : t \mapsto Ce^{-A(t)}$, où $C \in \mathbb{K}$, c'est-à-dire $y = Ce^{-A}$. Cette fonction est bien dérivable, et

$$\begin{aligned}y' + ay &= C(-a)e^{-A} + a.Ce^{-A} \\ &= 0\end{aligned}$$

  y est donc bien solution.

Démonstration de (T2) : pour toute fonction C dérivable, observons que $y := Ce^{-A}$ est dérivable de dérivée $e^{-A}\left(C' - aC\right)$ et donc on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}y' + ay = f \quad &\iff \quad e^{-A}\left(C' - aC\right) + aCe^{-A} = f \\ &\iff \quad C' = fe^A\end{aligned}$$

ainsi par remontée des équivalences, si C est une primitive de fe^A alors Ce^{-A} est bien solution.

Démonstration de (T3) : ayant fixé y_P une solution particulière de l'équation, on a pour toute fonction y dérivable, les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}y' + ay = f \quad &\iff \quad y' + ay = y_P' + ay_P \\ &\iff \quad (y - y_P)' + a(y - y_P) = 0 \\ &\iff \quad y - y_P \text{ solution de l'équation homogène} \\ &\iff \quad \exists y_H \text{ solution de l'équation homogène telle que } y = y_H + y_P.\end{aligned}$$

2 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notation. *On note $\mathcal{C}^2(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivables et dont la dérivée seconde est continue.*

2.1 Définition et structure linéaire

Définition. *Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I et $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. On considère l'EDL d'ordre 2 à coefficients constants (E_2) et l'équation homogène associée (H_2) :*

$$y'' + ay' + by = f(t) \qquad (E_2)$$

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (H_2)$$

Théorème (Principe de superposition/structure linéaire)**.** *Si une fonction y_1 est une solution de l'équation $y'' + ay' + by = f_1(t)$ et y_2 est solution de $y'' + ay' + by = f_2(t)$, où f_1 et f_2 sont deux fonctions continues, alors pour tout couple $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$ est solution de l'équation $y'' + ay' + by = \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)$.*

Conséquence : Si y_P est une solution particulière de (E_2), alors pour toute autre solution y de (E_2), la fonction $y_H = y - y_P$ est solution de l'équation différentielle avec second membre $f(t) - f(t) = 0$, c'est-à-dire solution de (H_2). On a donc

$$\boldsymbol{y = y_H + y_P}$$

2.2 Résolution de l'équation homogène (H_2)

Définition. *On appelle **équation caractéristique associée à** $y'' + ay' + by = 0$ (c'est-à-dire $(\mathbf{H_2})$) l'équation polynomiale*

$$\boxed{r^2 + ar + b = 0} \qquad \text{notée } (EC)$$

Théorème (solutions de (H_2) à valeurs complexes)**.** *Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. On note Δ le discriminant de (EC).*

- ***Si $\boldsymbol{\Delta \neq 0}$**, on note r_1 et r_2 les deux racines complexes de (EC) et les solutions de (H_2) sont les fonctions de la forme :*

$$y_H \ : \ t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \qquad \text{où } (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$$

- ***Si $\boldsymbol{\Delta = 0}$**, on note r_0 la racine double et les solutions sont :*

$$y_H \ : \ t \mapsto (C_1 + C_2 t) e^{r_0 t} \qquad \text{où } (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$$

Théorème (solutions de (H_2) à valeurs réelles)**.** *On suppose ici que* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^2$*. Soit* Δ *le discriminant de* (EC) *(forcément réel, lui aussi).*

- ***Si*** $\boldsymbol{\Delta > 0}$*, on note* r_1 *et* r_2 *les deux racines réelles de* (EC) *et les solutions de* (H_2) *sont de la forme :*
$$y_H \ : \ t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \qquad \text{où} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$
- ***Si*** $\boldsymbol{\Delta = 0}$*, on note* r_0 *la racine réelle double et les solutions sont :*
$$y_H \ : \ t \mapsto (C_1 + C_2 t) e^{r_0 t} \qquad \text{où} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$
- ***Si*** $\boldsymbol{\Delta < 0}$*, alors les deux racines de* (EC) *sont complexes conjuguées, notées* $r + i\omega$ *et* $r - i\omega$*, où* $(r, \omega) \in \mathbb{R}^2$*. Les solutions sont alors les fonctions de la forme :*
$$y_H \ : \ t \mapsto (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t))\, e^{rt} \qquad \text{où} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

2.3 Recettes pour solutions particulières

— **Recette 1 :** si le 2nd membre $f =$ constante, chercher y_P constante.
— **Recette 2 :** si f est polynomiale, chercher y_P polynomiale, de degré intelligemment choisi.
— **Recette 3 :** si $f(t) = e^{\alpha t}$ où $\alpha \in \mathbb{K}$, alors :
  — si α n'est pas une racine de (EC), chercher $y_P(t) = \lambda e^{\alpha t}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$;
  — si α est une racine simple de (EC), chercher $y_P(t) = \lambda t e^{\alpha t}$;
  — si α est une racine double de (EC), chercher $y_P(t) = \lambda t^2 e^{\alpha t}$;
— **Recette 4 :** si les coefficients a et b sont réels et $f(t) = \sin(\omega t)$ ou $\cos(\omega t)$, chercher $y_P(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
  Pour aller plus vite, on peut aussi trouver une solution particulière complexe de $y'' + ay' + by = \mathbf{e^{i\omega t}}$ puis en prendre la partie réelle (si c'est $\cos(\omega t)$) ou la partie imaginaire (si c'est $\sin(\omega t)$).

2.4 Résolution de l'équation complète

Théorème (Solution générale de (E_2))**.** *Les fonctions* $I \to \mathbb{K}$ *solutions de l'équation* (E_2) *sont les fonctions de la forme*
$$\boldsymbol{y = y_H + y_P}$$
où y_H *est une solution de l'équation homogène* (H_2) *et* y_P *est une solution particulière de* (E_2)*.*

Théorème (Solution du problème de Cauchy)**.** *Soit* $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ *et* $f : I \to \mathbb{K}$ *une fonction continue. Soit* $t_0 \in I$*.*
Alors pour tout couple $(y_0, v_0) \in \mathbb{K}^2$*, il existe une unique fonction* y *de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* I *qui satisfait le problème de Cauchy :*
$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Interprétation physique : *en mécanique du point, l'équation du mouvement ne suffit pas à déterminer la trajectoire de l'objet. Typiquement, on la détermine en utilisant les conditions initiales :* ***position initiale*** *(*y_0*) et* ***vitesse initiale*** *(*v_0*).*

Démonstrations principales de cette partie

Définition. *On appelle* ***équation caractéristique associée à*** $y'' + ay' + by = 0$ *(c'est-à-dire* $(\mathbf{H_2})$*) l'équation polynomiale*

$$\boxed{r^2 + ar + b = 0} \qquad \text{notée } (EC)$$

Théorème (solutions de (H_2) à valeurs complexes)**.** *Soit* $(a, b) \in \mathbb{C}^2$*. On note* Δ *le discriminant de* (EC)*.*

- ***Si*** $\boldsymbol{\Delta \neq 0}$*, on note* r_1 *et* r_2 *les deux racines complexes de* (EC) *et les solutions de* (H_2) *sont les fonctions de la forme :*

$$y_H \ : \ t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \qquad \text{où } (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$$

- ***Si*** $\boldsymbol{\Delta = 0}$*, on note* r_0 *la racine double et les solutions sont :*

$$y_H \ : \ t \mapsto (C_1 + C_2 t) e^{r_0 t} \qquad \text{où } (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$$

dem : quitte à avoir $r_1 = r_2 = r_0$ (si $\Delta = 0$), on a $r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2)$ (forme factorisée), et en particulier les relations coefficients-racines :

$$\begin{cases} a = -(r_1 + r_2) \\ b = r_1 r_2 \end{cases}$$

Soit $y : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On pose $\forall t \in I : z(t) = y(t) e^{-r_1 t}$, de sorte que :

$$\begin{cases} y(t) = z(t) e^{r_1 t} \\ y'(t) = e^{r_1 t} \left(z'(t) + r_1 z(t) \right) \\ y''(t) = e^{r_1 t} \left(z''(t) + 2 r_1 z'(t) + r_1^2 z(t) \right) \end{cases}$$

Donc y est solution de (H_2) ssi $\forall t \in I$:

$$e^{r_1 t} \left(z''(t) + (\underbrace{2r_1 + a}_{r_1 - r_2}) z'(t) + (\underbrace{r_1^2 + a r_1 + b}_{=0}) z(t) \right) = 0$$

$$\iff \boxed{z''(t) + (r_1 - r_2) z'(t) = 0}$$

On reconnaît alors une EDL d'ordre 1 sur z'.

- ▶ 1er cas : si $r_1 - r_2 \neq 0$ (ce qui équivaut à $\Delta \neq 0$)
  La résolution de l'EDL donne :

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \ \text{ tq } \ \forall t \in I \ , \ \ z'(t) = \lambda e^{-(r_1 - r_2)t}$$

$$\text{et par suite : } \quad \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}; \ \text{tq } \ \forall t \in I \ , \ \ z(t) = \frac{-\lambda}{r_1 - r_2} e^{-(r_1 - r_2)t} + \mu$$

  Enfin, comme $y(t) = z(t) e^{r_1 t}$, c'est équivalent à $y(t) = \dfrac{-\lambda}{r_1 - r_2} e^{r_2 t} + \mu e^{r_1 t}$.
  En renommant les constantes $C_1 = \mu$ et $C_2 = \frac{-\lambda}{r_1 - r_2}$, c'est bien le résultat prévu par le théorème.
- ▶ 2ème cas : si $r_1 - r_2 = 0$ (ce qui équivaut à $\Delta = 0$)
  z est alors solution de l'équation encadrée ssi :

$$\begin{aligned} \forall t \in I \ , \ \boxed{z''(t) = 0} &\iff \exists C_2 \in \mathbb{C} \ \text{ tq } \ \forall t \in I \ , \ \boxed{z'(t) = C_2} \\ &\iff \exists C_1, C_2 \in \mathbb{C} \ \text{ tq } \ \forall t \in I \ , \ \boxed{z(t) = C_1 + C_2 t} \\ &\iff \exists C_1, C_2 \in \mathbb{C} \ \text{ tq } \ \forall t \in I \ , \ \boxed{y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{r_0 t}} \qquad \underline{\text{ok}} \end{aligned}$$

Théorème (solutions de (H_2) à valeurs réelles)**.** *On suppose ici que* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$*. Soit* Δ *le discriminant de* (EC) *(forcément réel, lui aussi).*

- ***Si*** $\boldsymbol{\Delta > 0}$*, on note* r_1 *et* r_2 *les deux racines réelles de* (EC) *et les solutions de* (H_2) *sont de la forme :*
$$y_H \ : \ t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \qquad \text{où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$
- ***Si*** $\boldsymbol{\Delta = 0}$*, on note* r_0 *la racine réelle double et les solutions sont :*
$$y_H \ : \ t \mapsto (C_1 + C_2 t) e^{r_0 t} \qquad \text{où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$
- ***Si*** $\boldsymbol{\Delta < 0}$*, alors les deux racines de* (EC) *sont complexes conjuguées, notées* $r + i\omega$ *et* $r - i\omega$*, où* $(r, \omega) \in \mathbb{R}^2$*. Les solutions sont alors les fonctions de la forme :*
$$y_H \ : \ t \mapsto (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t))\, e^{rt} \qquad \text{où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

dem : La première remarque fondamentale est que si y est une fonction complexe solution de (H_2), alors en prenant la partie réelle dans l'égalité $y'' + ay' + by = 0$, on obtient

$$\mathrm{Re}(y)'' + a\mathrm{Re}(y)' + b\mathrm{Re}(y) = 0 \qquad (\text{car } a \text{ et } b \text{ sont réels})$$

ce qui signifie que la fonction $\mathrm{Re}(y)$ est une solution (réelle, donc) de (H_2).
Réciproquement, toute fonction réelle solution de (H_2) peut être vue comme la partie réelle d'une solution complexe de (H_2) (elle-même).
Conclusion : **les solutions réelles de** (H_2) **sont très exactement les parties réelles des solutions complexes de** (H_2)**.**

► Si $\Delta > 0$ (et donc r_1 et r_2 sont réelles). Il s'agit de déterminer la partie réelle de

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \qquad \text{où } \boxed{C_1, C_2 \in \mathbb{C}}$$

$$\text{ce qui donne} \quad \mathrm{Re}(y(t)) = \underbrace{\mathrm{Re}(C_1)}_{=:K_1} e^{r_1 t} + \underbrace{\mathrm{Re}(C_2)}_{=:K_2} e^{r_2 t}$$

K_1 et K_2 sont deux constantes pouvant prendre toutes les valeurs réelles. On obtient bien la forme annoncée par le théorème, à un changement de notations près.

► Si $\Delta = 0$ (et donc r_0 racine double réelle) : même raisonnement.

► Si $\Delta < 0$ (on a donc deux racines complexes conjuguées $r + i\omega$ et $r - i\omega$), il s'agit de prendre la partie réelle de

$$y(t) = C_1 e^{(r+i\omega)t} + C_2 e^{(r-i\omega)t} \qquad \text{où } \boxed{C_1, C_2 \in \mathbb{C}}$$

Or :

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{rt}\left[C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right] \\ &= e^{rt}\left[C_1(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) + C_2(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))\right] \\ &= e^{rt}\left[(C_1 + C_2)\cos(\omega t) + i(C_1 - C_2)\sin(\omega t)\right] \end{aligned}$$

Donc :

$$\mathrm{Re}(y(t)) = e^{rt}\left[\underbrace{\mathrm{Re}(C_1 + C_2)}_{=:K_1}\cos(\omega t) + \underbrace{\mathrm{Re}(i(C_1 - C_2))}_{=:K_2}\sin(\omega t)\right]$$

K_1 et K_2 sont deux constantes pouvant prendre toutes les valeurs réelles. En effet, si l'on fixe $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$, le couple de complexes $(C_1, C_2) = (s_1, is_2)$ donne $K_1 = s_1$ et $K_2 = s_2$. On obtient bien la forme annoncée par le théorème, à un changement de notations près.